سلم تصحيح مقرر الطبولوجيا (١)
السنة الثانية - رياضيات
الفصل الثاني - العام الدراسي ٢٠١٦/٢٠١٧

السؤال الأول (٢٠ علامة): أ- التعاريف:

١) نقول عن النقطة x إنها داخلية في المجموعة A من الفضاء المتري X إذا وجدت كرة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها العدد $r>0$ أي $B(x,r)$ بحيث [4]

$$B(x,r) \subseteq A$$

٢) ونقول عن النقطة x إنها حدية للمجموعة A إذا كان أي جوار للنقطة x يتقاطع مع A ومع متممتها $X \setminus A$. [4]

٣) نقول عن مجموعة إنها محدودة إذا أمكن احتواؤها في كرة مغلقة نصف قطرها عدد منته [4]

ب- f مستمر إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية وفقه لأي مجموعة مفتوحة في Y هي مجموعة مفتوحة في X. [4]

جـ- f مستمر إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية وفقه لأي مجموعة مغلقة في Y هي مجموعة مغلقة في X. [4]

السؤال الثاني (٢٠ علامة):

أ- $A^\circ = \Phi$ [3] ؛ $\overline{A} = \mathbb{R}$ [3] ؛ $A' = \mathbb{R}$ [3] ؛ $Fr(A) = \overline{A} \setminus A^\circ = \mathbb{R}$ [3] ؛ $Ext(A) = \mathbb{R} \setminus \overline{A} = \Phi$ [3]

ب) A ليست مفتوحة لأن $A \neq A^\circ$ [3]

ج) A ليست مغلقة لأن $A \neq \overline{A}$ [3]

د) A كثيفة لأن $\overline{A} = \mathbb{R}$ [4]

هـ) A ليست جواراً لأي نقطة من نقاطها لأنها لا تحوي كرة مفتوحة (مجالاً مفتوحاً) مركزها أي نقطة من نقاطها. [5]

السؤال الثالث (٢٠ علامة):

أ- لأن لصاقة المجموعة تساوي تقاطع جميع المجموعات المغلقة الحاوية لهذه المجموعة. [4]

ب- أي مجال مغلق $[a,b]$ هو مجموعة متراصة ومترابطة [4]

جـ- أي مجموعة من الشكل $]a,b[\cup]c,d[$ أو $[a,b[\cup \{c\}$ أو ... حيث $a<b<c<d$. [4]

د- ليكن $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ تغطية مفتوحة كيفية للمجموعة المنتهية $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ فإن العنصر a_i سيقع في إحدى مجموعات التغطية ولتكن U_{α_i} ، [8]

Scanned by CamScanner

$i = 1, 2, \dots, n$.

إن الأسرة $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}$ تشكل تغطية مفتوحة منتهية لـ A ،
أي أن A متراصة حسب التعريف .

السؤال الرابع (٢٠ علامة) :

أ - لتكن $x \in \bar{A}$. حسب مبرهنة سابقة توجد متتالية (x_n) من عناصر A متقاربة من x . بما أن المتتالية متقاربة فهي متتالية كوشي ، وبما أن A فضاء جزئي تام فإن أي متتالية كوشي من عناصره متقاربة فيه ، أي أن $x \in A$. 13
وهذا يعني أن A تحوي جميع نقاطها اللاصقة ، إذن هي مغلقة .

ب - لنفرض جدلاً أن C تحتوي نقاطاً مشتركة مع A ومع B . هذا يعني أن $A \cap C \neq \Phi$ و $B \cap C \neq \Phi$. إن المجموعتين $A \cap C$ و $B \cap C$ مفتوحتان في الفضاء الجزئي C لأن A و B مفتوحتان في X ، وهاتان المجموعتان تحققان الآتي :

$$(A\cap C)\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C = \Phi \cap C = \Phi$$

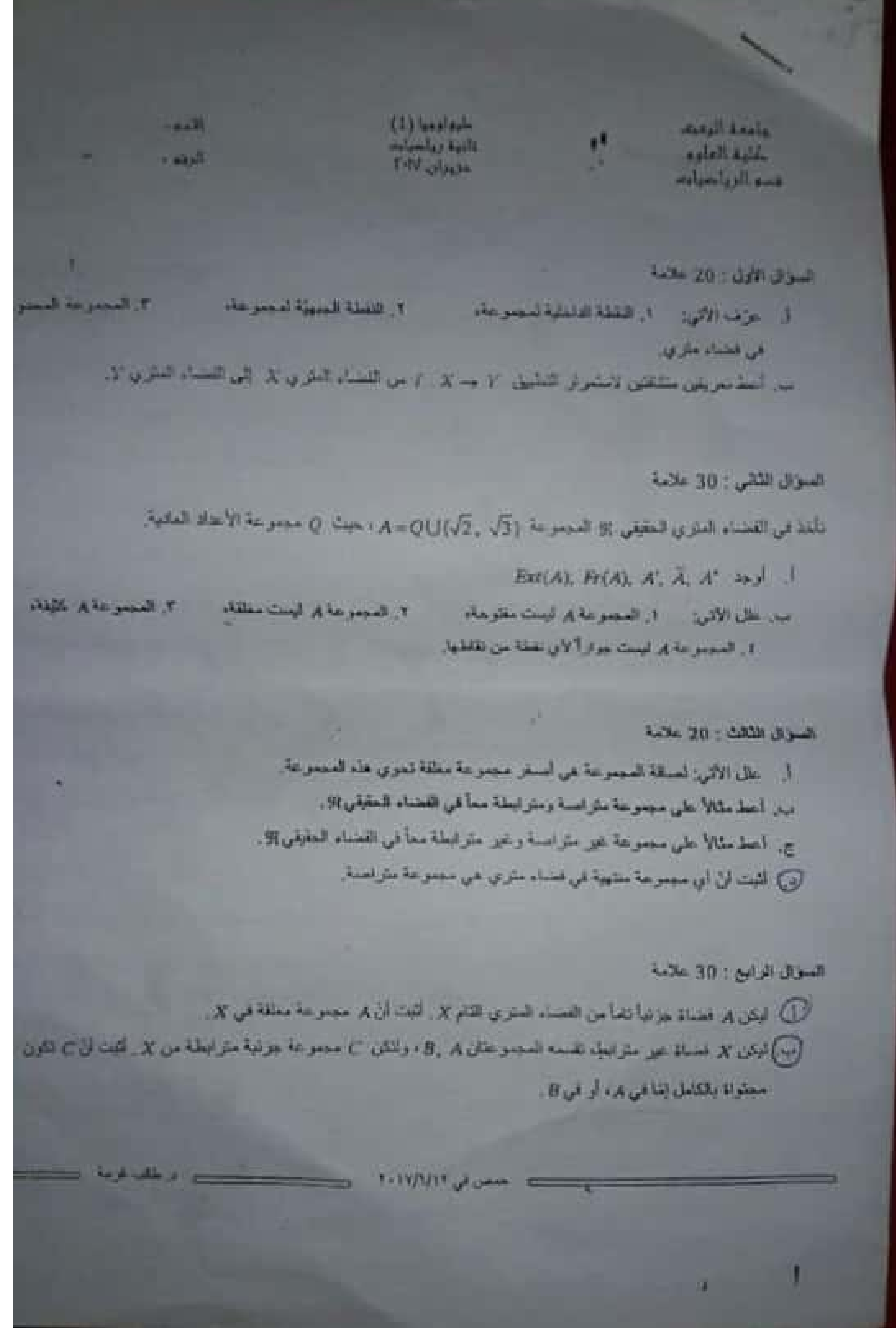
$$(A\cap C)\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap C = X \cap C = C$$

أي أن المجموعتين $A \cap C$ و $B \cap C$ تشكلان تقسيماً للفضاء الجزئي C ، مما يعني أن الفضاء C غير مترابط ، أي المجموعة C غير مترابطة ، وهذا تناقض . إذن الفرض الجدلي خاطئ ، والمجموعة C محتواة بالكامل إما في A أو في B .

حمص في ٢٠١٧/٦/١٢

أ. د. طالب غريبة

Scanned by CamScanner



جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

طبولوجيا (1)
ثالثة رياضيات
حزيران ٢٠١٧

الاسم:
الرقم:

السؤال الأول : 20 علامة

أ. عرّف الآتي: ١. النقطة الداخلية لمجموعة، ٢. النقطة الحدودية لمجموعة، ٣. المجموعة المحدو
في فضاء متري.

ب. أعط تعريفين متكافئين لاستمرار التطبيق $f: X \to Y$ من الفضاء المتري X إلى الفضاء المتري Y.

السؤال الثاني : 30 علامة

نأخذ في الفضاء المتري الحقيقي $\Re$ المجموعة $A = Q \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3})$، حيث Q مجموعة الأعداد العادية.

أ. أوجد $Ext(A),\ Fr(A),\ A',\ \bar{A},\ A^{\circ}$

ب. علل الآتي: ١. المجموعة A ليست مفتوحة، ٢. المجموعة A ليست مغلقة، ٣. المجموعة A كثيفة،
٤. المجموعة A ليست جواراً لأي نقطة من نقاطها.

السؤال الثالث : 20 علامة

أ. علل الآتي: لصاقة المجموعة هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي هذه المجموعة.

ب. أعط مثالاً على مجموعة متراصة ومترابطة معاً في الفضاء الحقيقي $\Re$.

ج. أعط مثالاً على مجموعة غير متراصة وغير مترابطة معاً في الفضاء الحقيقي $\Re$.

د. أثبت أن أي مجموعة منتهية في فضاء متري هي مجموعة متراصة.

السؤال الرابع : 30 علامة

أ. ليكن A فضاءً جزئياً تاماً من الفضاء المتري التام X. أثبت أن A مجموعة مغلقة في X.

ب. ليكن X فضاءً غير مترابط تقسمه المجموعتان A, B، ولتكن C مجموعة جزئية مترابطة من X. أثبت أن C تكون محتواة بالكامل إما في A، أو في B.

حمص في ٢٠١٧/٦/١٢ [illegible]

Scanned by CamScanner